ー 中 3Z　宿題プリント (3 学期-4)　解答 ー

宿題 4-1

(1)　解が $1, 3, 4$ である 3 次方程式として、
$(x-1)(x-3)(x-4)=0$
$(x^2-4x+3)(x-4)=0$
$x^3-8x^2+19x-12=0$
が見つかる。

よって、$\boxed{p=-8,\ q=19,\ r=-12}$

<u>別解</u>
3 次方程式の解と係数の関係より、

$$\begin{cases} 1+3+4=-p \\ 1\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 1=q \\ 1\cdot 3\cdot 4=-r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-8 \\ q=19 \\ r=-12 \end{cases}$$

(2)　解が $1, 2$ (2 が 2 重解) である 3 次方程式として、
$(x-1)(x-2)(x-2)=0$
$(x-1)(x^2-4x+4)=0$
$x^3-5x^2+8x-4=0$
が見つかる。

よって、$\boxed{p=-5,\ q=8,\ r=-4}$

<u>別解</u>
3 次方程式の解と係数の関係より、

$$\begin{cases} 1+2+2=-p \\ 1\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 1=q \\ 1\cdot 2\cdot 2=-r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-5 \\ q=8 \\ r=-4 \end{cases}$$

宿題 4-2

3 次方程式の解と係数の関係より、

(1)　$I=\alpha+\beta+\gamma=\boxed{3}$

(2)　$J=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\boxed{-2}$

(3)　$K=\alpha\beta\gamma=\boxed{-5}$

<u>補足</u>
3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の 3 解が α, β, γ のとき、
$x^3+px^2+qx+r=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ \cdots$①
と因数分解できる。

① の右辺は

$$\begin{aligned} &\bigl(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\bigr)(x-\gamma) \\ &=x^3-(\alpha+\beta)x^2 \quad +\alpha\beta x \\ &\qquad -\gamma x^2+(\alpha+\beta)\gamma x-\alpha\beta\gamma \\ &=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

と展開できる。これと ① の左辺と対応する係数を比べ、

$$\begin{cases} p=-(\alpha+\beta+\gamma) \\ q=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \\ r=-\alpha\beta\gamma \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-p \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q \\ \alpha\beta\gamma=-r \end{cases}$$

が成り立つとわかる。

これを **3 次方程式の解と係数の関係**と呼ぶ。

なお、① の右辺を展開するには、展開後のそれぞれの次数の項がどのように生じるかを考えてもよい。
例えば、x^2 の項は、3 つのカッコから何を選んでかけるかに注目し、
$-\alpha\cdot x\cdot x-x\cdot\beta\cdot x-x\cdot x\cdot\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)x^2$
となることが見抜ける。

1 次の項、定数項についても同様に見抜くことができる。

宿題 4-3

2 次方程式の解と係数の関係より、

$\alpha+\beta=\boxed{-3}\cdots(1)$ の答 I

$\alpha\beta=\boxed{-2}\cdots(2)$ の答 J

である。

(3) $K=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{-3}{-2}=\boxed{\dfrac{3}{2}}$

(4) $L=(3-\alpha)(3-\beta)=9-3(\alpha+\beta)+\alpha\beta$
$\quad=9-3(-3)+(-2)=\boxed{16}$

別解

$x^2+3x-2=(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できるので、

両辺に $x=3$ を代入すれば、

$3^2+3\cdot 3-2=(3-\alpha)(3-\beta)$

$\therefore\ (3-\alpha)(3-\beta)=\boxed{16}$

(5) $M=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2(-2)$
$\quad=\boxed{13}$

別解

α,β は $x^2+3x-2=0$ の解なので、

$\alpha^2+3\alpha-2=0\ \cdots$①

$\beta^2+3\beta-2=0\ \cdots$②

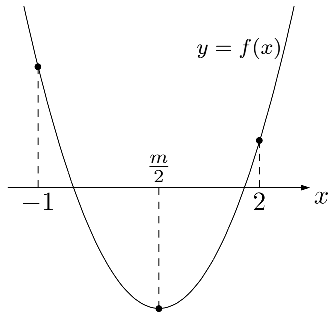
が成立。①＋② より、

$\alpha^2+\beta^2+3(\alpha+\beta)-4=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=-3(\alpha+\beta)+4=-3(-3)+4=\boxed{13}$

宿題 4-4

$$f(x)=\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^2-\left(\tfrac{m}{2}\right)^2-3m$$
$$=\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^2-\tfrac{m^2}{4}-3m$$



$f(x)=0$ が $-1<x<2$ の範囲に、異なる 2 個の解を持つか、または重解を持つのは、上図のように $y=f(x)$ のグラフが x 軸の $-1<x<2$ の部分と異なる 2 点で交わるか接するとき。

その条件は

$$\begin{cases}\text{頂点の } x \text{ 座標が} -1<x<2 \text{ の範囲内}\\ \text{頂点の } y \text{ 座標が } 0 \text{ 以下}\\ x=-1,2 \text{ での } y \text{ 座標が正}\end{cases}$$

すなわち、

$$\begin{cases}-1<\frac{m}{2}<2\\ f(\frac{m}{2})\leqq 0\\ f(-1)>0\\ f(2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<4\\ -\frac{m^2}{4}-3m\leqq 0\\ m<\frac{1}{2}\\ m<\frac{4}{5}\end{cases}\quad\cdots☆$$

ここで $-\frac{m^2}{4}-3m\leqq 0$ をみたす m の範囲は

$m^2+12m\geqq 0$

$m(m+12)\geqq 0$

$m\leqq -12,\ m\geqq 0$ である。

したがって、☆をみたす m の範囲は、

$\boxed{0\leqq m<\dfrac{1}{2}}$