

－ 中 3Z 宿題プリント (3 学期-5) 解答 －

宿題 5-1

① の左辺を $f(x)$ とおく。

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - k \text{ より、}$$

$y = f(x)$ のグラフは、頂点が $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4} - k\right)$ である、

下に凸な放物線。

- (1) ① が $-1 \leq x \leq 2$ の範囲に、相異なる 2 個の実数解か重解を持つのは、 $y = f(x)$ のグラフが、 x 軸の $-1 \leq x \leq 2$ の部分と異なる 2 点で交わるか接するとき。

そうなるのは、頂点が $-1 \leq x \leq 2$ の範囲にあることを考慮すると、

$$\begin{cases} \text{頂点の } y \text{ 座標が } 0 \text{ 以下} \\ x = -1 \text{ での } y \text{ 座標が } 0 \text{ 以上} \\ x = 2 \text{ での } y \text{ 座標が } 0 \text{ 以上} \end{cases}$$

のとき。すなわち、

$$\begin{cases} -\frac{9}{4} - k \leq 0 \\ f(-1) = 4 - k \geq 0 \\ f(2) = -2 - k \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \geq -\frac{9}{4} \\ k \leq 4 \\ k \leq -2 \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{-\frac{9}{4} \leq k \leq -2} \text{ のとき。}$$

補足

頂点の x 座標 $\frac{3}{2}$ と区間の左端 $x = -1$ 、右端 $x = 2$ との差を比べると、 $\frac{3}{2} - (-1) > 2 - \frac{3}{2}$ なので、 $f(-1) > f(2)$ が成り立つと見抜ける。

したがって、

$$\begin{cases} -\frac{9}{4} - k \leq 0 \\ f(2) = -2 - k \geq 0 \end{cases}$$

の 2 つの条件だけを考えればよい。

- (2) ① が $-1 \leq x \leq 2$ の範囲に、少なくとも 1 個の実数解を持つのは、 $y = f(x)$ のグラフが、 x 軸の $-1 \leq x \leq 2$ の部分と 1 個以上の共有点を持つとき。

そうなるのは、頂点が $-1 \leq x \leq 2$ の範囲にあることを考慮すると、

$$\begin{cases} \cdot \text{頂点の } y \text{ 座標が } 0 \text{ 以下} \\ \cdot x = -1 \text{ での } y \text{ 座標, } x = 2 \text{ での } y \text{ 座標の少なくとも一方が } 0 \text{ 以上} \end{cases}$$

のとき。

すなわち、

$$\begin{cases} -\frac{9}{4} - k \leq 0 \\ (f(-1) \geq 0 \text{ または } f(2) \geq 0) \end{cases}$$

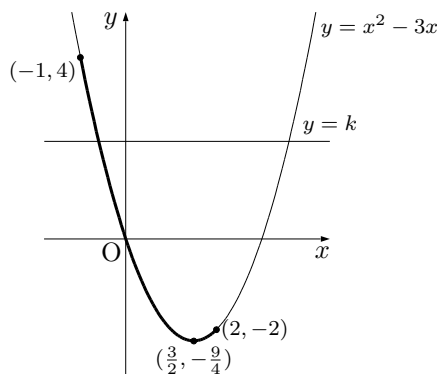
$$\begin{cases} k \geq -\frac{9}{4} \\ (k \leq 4 \text{ または } k \leq -2) \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{-\frac{9}{4} \leq k \leq 4} \text{ のとき。}$$

別解

① は、 $x^2 - 3x = k$ と変形でき、これをみたす実数 x は、 $y = x^2 - 3x$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点の x 座標とみなせる。

$y = x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ なので、このグラフは下図のよう。



- (1) $y = x^2 - 3x$ のグラフの $-1 \leq x \leq 2$ の部分と、直線 $y = k$ が 2 点で交わるか接するような k の範囲を考え、

$$\boxed{-\frac{9}{4} \leq k \leq -2}$$

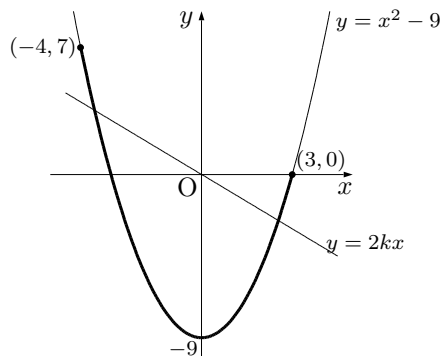
- (2) $y = x^2 - 3x$ のグラフの $-1 \leq x \leq 2$ の部分と、直線 $y = k$ が共有点を 1 個以上持つような k の範囲を考え、

$$\boxed{-\frac{9}{4} \leq k \leq 4}$$

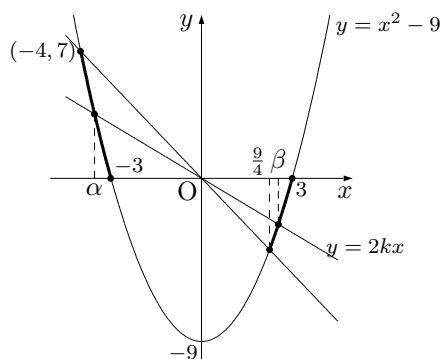
宿題 5-2

- (1) $x^2 - 2kx - 9 = 0 \cdots \textcircled{1}$ を変形すると、
 $x^2 - 9 = 2kx$ となるので、放物線 $y = x^2 - 9$ と
 直線 $y = \boxed{2kx}$ の共有点の x 座標が $\textcircled{1}$ の実数解
 である。
- (2) $\textcircled{1}$ が $-4 \leq x \leq 3$ の範囲に異なる 2 解をもつのは、
 $y = x^2 - 9$, $y = 2kx$ の 2 つのグラフが、 $-4 \leq x \leq 3$
 の範囲に 2 つの交点をもつとき。
 直線 $y = 2kx$ が点 $(-4, 7)$ を通るのは、
 $2k = -\frac{7}{4}$
 $k = -\frac{7}{8}$ のとき。
 直線 $y = 2kx$ が点 $(3, 0)$ を通るのは、
 $k = 0$ のとき。

したがって、下図より、 $\boxed{-\frac{7}{8} \leq k \leq 0}$

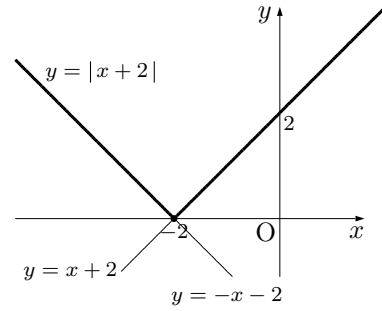


- (3) $k = -\frac{7}{8}$ のとき、 $\textcircled{1}$ の解は
 $x^2 + \frac{7}{4}x - 9 = 0 \quad (x+4)\left(x - \frac{9}{4}\right) = 0 \quad x = -4, \frac{9}{4}$
 $k = 0$ のとき、 $\textcircled{1}$ の解は、 $x = \pm 3$
 したがって、下図より、 $\boxed{-4 \leq \alpha \leq -3, \frac{9}{4} \leq \beta \leq 3}$



宿題 5-3

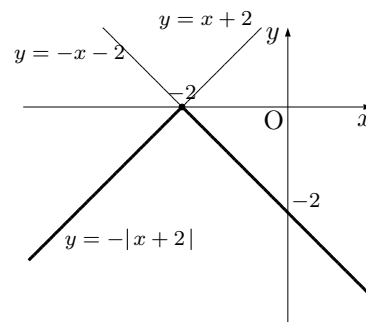
- (1) $y = |x + 2|$
 $= \begin{cases} x + 2 & \cdots x \geq -2 \text{ のとき} \\ -(x + 2) & \cdots x < -2 \text{ のとき} \end{cases}$



補足

$y = x + 2$ のグラフの $y \leq 0$ の部分を x 軸の上に折り返したものが、 $y = |x + 2|$ のグラフだ、と思って描いても良い。

- (2) $y = -|x + 2|$
 $= \begin{cases} -(x + 2) & \cdots x \geq -2 \text{ のとき} \\ x + 2 & \cdots x < -2 \text{ のとき} \end{cases}$



補足

$y = |x + 2|$ のグラフを x 軸に関して対称移動したものが $y = -|x + 2|$ のグラフだ、考えても良い。

- (3) $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$ より、
 $x^2 - x - 2 \geq 0$ となるのは、 $x \leq -1$ または $x \geq 2$ の
 ときで、
 $x^2 - x - 2 \leq 0$ となるのは、 $-1 \leq x \leq 2$ のとき。

したがって、

$$y = |x^2 - x - 2|$$

$$= \begin{cases} x^2 - x - 2 & \cdots x \leq -1 \text{ または } x \geq 2 \text{ のとき} \\ -(x^2 - x - 2) & \cdots -1 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

