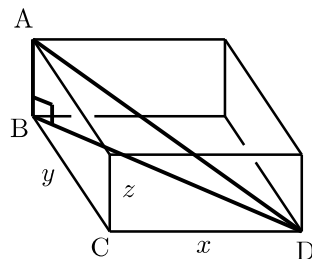


1

$$\begin{aligned} z &= 2x^2 + 4x + 3y^2 + 12y + 10 \\ &= 2(x+1)^2 - 2 + 3y^2 + 12y + 10 \\ &= 2(x+1)^2 + 3y^2 + 12y + 8 \\ &= 2(x+1)^2 + 3(y+2)^2 - 12 + 8 \\ &= 2(x+1)^2 + 3(y+2)^2 - 4 \end{aligned}$$

より、 z は $x = -1, y = -2$ のとき最小値 -4 をとる。



(1) 直方体の12本の辺の長さの合計が12であることから、
 $4x + 4y + 4z = 12 \quad \therefore x + y + z = 3 \cdots \textcircled{1}$

(2) 上図の直角三角形BCD, ABD にピタゴラスの定理を用いると、

$$BD^2 = CD^2 + BC^2 = x^2 + y^2$$

$$AD^2 = BD^2 + AB^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\therefore L^2 = x^2 + y^2 + z^2 \cdots \textcircled{2}$$

(3) ① を、 $z = -x - y + 3 \cdots \textcircled{1}'$

として、② に代入すると、

$$\begin{aligned} L^2 &= x^2 + y^2 + (-x - y + 3)^2 \\ &= x^2 + y^2 + x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y \\ &= 2x^2 + (2y - 6)x + 2y^2 - 6y + 9 \\ &= 2 \{ x^2 + (y - 3)x \} + 2y^2 - 6y + 9 \\ &= 2 \left\{ \left(x + \frac{y-3}{2} \right)^2 - \frac{(y-3)^2}{4} \right\} + 2y^2 - 6y + 9 \\ &= 2 \left(x + \frac{y-3}{2} \right)^2 - \frac{(y-3)^2}{2} + 2y^2 - 6y + 9 \\ &= 2 \left(x + \frac{y-3}{2} \right)^2 + \frac{-(y-3)^2 + 4y^2 - 12y + 18}{2} \\ &= 2 \left(x + \frac{y-3}{2} \right)^2 + \frac{3y^2 - 6y + 9}{2} \\ &= 2 \left(x + \frac{y-3}{2} \right)^2 + \frac{3(y-1)^2 + 6}{2} \\ &= 2 \left(x + \frac{y-3}{2} \right)^2 + \frac{3(y-1)^2}{2} + 3 \end{aligned}$$

L が最小になるのは L^2 が最小になるときであり、
 それは上の式から、 $x + \frac{y-3}{2} = 0$ かつ $y - 1 = 0$

のとき、すなわち、 $x = 1, y = 1, z = 1 \quad (\because \textcircled{1}')$

のときである。このとき、 $L^2 = 3$ より、 $L = \sqrt{3}$ であり、これが求めるべき L の最小値である。