

- 中3C 宿題プリント(冬期-1) 解答 -

1.  $x, y$  が実数全体を動くとき、次のそれぞれの関数の最大値・最小値と、そのときの  $x, y$  の値を求めよ。最大値・最小値がない場合には「なし」と答えよ。

(1)  $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y + 6$

(2)  $z = -x^2 + 2y^2 + 1$

(3)  $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 6y - 1$

(1) たとえば、 $y = 0$  とし、 $x$  を大きくしていくと、 $z$  は限りなく大きくなっていくので、 $z$  の最大値は **なし**。

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 + 2x + 4y + 6 \\ &= (x+1)^2 - 1^2 + (y+2)^2 - 2^2 + 6 \\ &= (x+1)^2 + (y+2)^2 + 1 \end{aligned}$$

と変形できるので、 $z \geq 1$  が常に成立。

$x = -1, y = -2$  のとき、 $z = 1$  となるので、 $z$  の最小値は **1** である。 $(x = \boxed{-1}, y = \boxed{-2})$

(2) たとえば、 $x = 0$  とし、 $y$  を大きくしていくと、 $z$  は限りなく大きくなっていくので、 $z$  の最大値は **なし**。

たとえば、 $y = 0$  とし、 $x$  を大きくしていくと、 $z$  は限りなく小さくなっていくので、 $z$  の最小値は **なし**。

(3) たとえば、 $y = 0$  とし、 $x$  を大きくしていくと、 $z$  は限りなく大きくなっていくので、 $z$  の最大値は **なし**。

まずは  $x$  について平方完成してみると、

$$\begin{aligned} z &= x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 6y - 1 \\ &= x^2 + (2y+4)x + 2y^2 + 6y - 1 \\ &= \{x + (y+2)\}^2 - (y+2)^2 + 2y^2 + 6y - 1 \\ &= \{x + (y+2)\}^2 + y^2 + 2y - 5 \end{aligned}$$

さらに、右辺の右半分を  $y$  について平方完成すると、

$$\begin{aligned} z &= \{x + (y+2)\}^2 + (y+1)^2 - 1^2 - 5 \\ &= \underbrace{\{x + (y+2)\}^2}_{\text{ア}} + \underbrace{(y+1)^2}_{\text{イ}} - 6 \end{aligned}$$

と変形できるので、 $z \geq -6$  が常に成立。

$z = -6$  となることがあるかどうかを調べる。

アとイの部分が同時に0なのは、

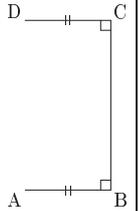
$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y + 1 = 0 \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

のときで、このとき  $z = -6$  となる。

以上より、 $z$  の最小値は **-6** である。

$(x = \boxed{-1}, y = \boxed{-1})$

2. 長さ1の針金を折り曲げて、右図のようなコの字形を作る。AB = CD =  $x$ , BC =  $y$  とおいて、以下の間に答えよ。



(1)  $x$  がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 長方形 ABCD の面積  $S$  の最大値と、そのときの  $x, y$  の値を求めよ。

(1) 長さ1の針金を折り曲げるので、

$$AB + BC + CD = 1$$

$$x + y + x = 1$$

$$y = 1 - 2x \dots \textcircled{1}$$

$x, y$  は長さを表すので、 $x > 0, y > 0$

$$x > 0, 1 - 2x > 0 \quad (\textcircled{1} \text{より})$$

$$\boxed{0 < x < \frac{1}{2}}$$

(2)  $S = AB \cdot BC$

$$= xy$$

$$= x(1 - 2x) \quad (\textcircled{1} \text{より})$$

$$= -2x^2 + x$$

$$= -2 \left( x^2 - \frac{1}{2}x \right)$$

$$= -2 \left\{ \left( x - \frac{1}{4} \right)^2 - \left( \frac{1}{4} \right)^2 \right\}$$

$$= -2 \left( x - \frac{1}{4} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{4} \right)^2$$

$$= -2 \left( x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{8}$$

下図より、

$x$  が (1) で求めた範囲を動くとき、

$S$  の最大値は  $\boxed{\frac{1}{8}}$  である。

$$\left( x = \boxed{\frac{1}{4}}, y = \boxed{\frac{1}{2}} \right) \quad (\textcircled{1} \text{より})$$

