－ 中 3C　宿題プリント (冬期-1)　解答 －

1. x, y が実数全体を動くとき、次のそれぞれの関数の最大値・最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。最大値・最小値がない場合には「なし」と答えよ。

(1)　$z = x^2 + y^2 + 2x + 4y + 6$

(2)　$z = -x^2 + 2y^2 + 1$

(3)　$z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 6y - 1$

(1)　たとえば、$y = 0$ とし、x を大きくしていくと、z は限りなく大きくなっていくので、z の最大値は $\boxed{\text{なし}}$。

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 + 2x + 4y + 6 \\ &= (x+1)^2 - 1^2 + (y+2)^2 - 2^2 + 6 \\ &= (x+1)^2 + (y+2)^2 + 1 \end{aligned}$$

と変形できるので、$z \geqq 1$ が常に成立。

$x = -1, y = -2$ のとき、$z = 1$ となるので、z の最小値は $\boxed{1}$ である。($x = \boxed{-1}, y = \boxed{-2}$)

(2)　たとえば、$x = 0$ とし、y を大きくしていくと、z は限りなく大きくなっていくので、z の最大値は $\boxed{\text{なし}}$。

たとえば、$y = 0$ とし、x を大きくしていくと、z は限りなく小さくなっていくので、z の最小値は $\boxed{\text{なし}}$。

(3)　たとえば、$y = 0$ とし、x を大きくしていくと、z は限りなく大きくなっていくので、z の最大値は $\boxed{\text{なし}}$。

まずは x について平方完成してみると、

$$\begin{aligned} z &= x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 6y - 1 \\ &= x^2 + (2y+4)x + 2y^2 + 6y - 1 \\ &= \{x + (y+2)\}^2 - (y+2)^2 + 2y^2 + 6y - 1 \\ &= \{x + (y+2)\}^2 + y^2 + 2y - 5 \end{aligned}$$

さらに、右辺の右半分を y について平方完成すると、

$$\begin{aligned} z &= \{x + (y+2)\}^2 + (y+1)^2 - 1^2 - 5 \\ &= \underbrace{\{x + (y+2)\}^2}_{\text{ア}} + \underbrace{(y+1)^2}_{\text{イ}} - 6 \end{aligned}$$

と変形できるので、$z \geqq -6$ が常に成立。

$z = -6$ となることがあるかどうかを調べる。
アとイの部分が同時に 0 なるのは、

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

のときで、このとき $z = -6$ となる。

以上より、z の最小値は $\boxed{-6}$ である。
($x = \boxed{-1}, y = \boxed{-1}$)

2. 長さ 1 の針金を折り曲げて、右図のようなコの字形を作る。AB = CD = x, BC = y とおいて、以下の問に答えよ。

(1)　x がとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　長方形 ABCD の面積 S の最大値と、そのときの x, y の値を求めよ。

(1)　長さ 1 の針金を折り曲げるので、

$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CD} = 1$

$x + y + x = 1$

$y = 1 - 2x$ $\cdots$①

x, y は長さを表すので、$x > 0, y > 0$

$x > 0, 1 - 2x > 0$　(①より)

$\boxed{0 < x < \frac{1}{2}}$

(2)

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \\ &= xy \\ &= x(1-2x) \quad (\text{①より}) \\ &= -2x^2 + x \\ &= -2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) \\ &= -2\left\{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right\} \\ &= -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

下図より、
x が (1) で求めた範囲を動くとき、
S の最大値は $\boxed{\frac{1}{8}}$ である。

$\left(x = \boxed{\frac{1}{4}},\ y = \boxed{\frac{1}{2}}\ (\text{①より})\right)$