

ー 中 3C 宿題プリント (冬期-2) 解答 ー

1. x, y を実数とする。次の不等式を示せ。また、等号成立条件を求めよ。

(1) $x^2 + 2y^2 + 6 \geq 4x - 4y$

(2) $x^2 - 4xy + 6y^2 \geq 2x + 4y - 9$

(1) (左辺) - (右辺)

$$\begin{aligned} &= x^2 + 2y^2 + 6 - (4x - 4y) \\ &= x^2 - 4x + 2(y^2 + 2y) + 6 \\ &= (x - 2)^2 - 2^2 + 2\{(y + 1)^2 - 1^2\} + 6 \\ &= (x - 2)^2 - 4 + 2(y + 1)^2 - 2 + 6 \\ &= (x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

よって、どんな実数 x, y に対しても
不等式 $x^2 + 2y^2 + 6 \geq 4x - 4y \cdots \textcircled{1}$
が成り立つことが示せた。

$\textcircled{1}$ で等号が成り立つのは、 $(x - 2)^2$ と $2(y + 1)^2$ が同時に 0 となるとき、すなわち、 $x = 2, y = -1$ のときである。

(2) (左辺) - (右辺)

$$\begin{aligned} &= x^2 - 4xy + 6y^2 - (2x + 4y - 9) \\ &= x^2 - 2(2y + 1)x + 6y^2 - 4y + 9 \\ &= \left(x - (2y + 1)\right)^2 - (2y + 1)^2 + 6y^2 - 4y + 9 \\ &= \left(x - (2y + 1)\right)^2 + 2y^2 - 8y + 8 \\ &= \left(x - (2y + 1)\right)^2 + 2(y^2 - 4y) + 8 \\ &= \left(x - (2y + 1)\right)^2 + 2\{(y - 2)^2 - 2^2\} + 8 \\ &= \left(x - (2y + 1)\right)^2 + 2(y - 2)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

よって、どんな実数 x, y に対しても
不等式 $x^2 - 4xy + 6y^2 \geq 2x + 4y - 9 \cdots \textcircled{2}$
が成り立つことが示せた。

$\textcircled{2}$ で等号が成り立つのは、 $\left(x - (2y + 1)\right)^2$ と $2(y - 2)^2$ が同時に 0 となるとき。

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

より、 $x = 5, y = 2$ のときである。

2. x, y を実数とする。

$x + 2y = 10$ のとき、 $x^2 + y^2 \geq 20$ が成り立つことを示せ。
また、等号成立条件を求めよ。

(左辺) - (右辺)

$$\begin{aligned} &= x^2 + y^2 - 20 \\ &= (10 - 2y)^2 + y^2 - 20 \\ &\quad (x + 2y = 10 \text{ より、} x = 10 - 2y \text{ を代入}) \\ &= 5y^2 - 40y + 80 \\ &= 5(y^2 - 8y) + 80 \\ &= 5\{(y - 4)^2 - 4^2\} + 80 \\ &= 5(y - 4)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

よって、 $x + 2y = 10$ のとき、必ず不等式 $x^2 + y^2 \geq 20 \cdots \textcircled{1}$
が成り立つことが示せた。

$\textcircled{1}$ で等号が成り立つのは、 $5(y - 4)^2 = 0$ のとき、すなわち、 $y = 4$ のとき。

このとき、 $x = 10 - 2y$ より、 $x = 10 - 2 \cdot 4 = 2$ である。

すなわち、等号成立条件は、 $x = 2, y = 4$ 。