

－ 中3C 宿題プリント(冬期-3) 解答－

1. $x > 0, y > 0, xy = 4$ とする。以下の z の最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。

(1) $z = x + y$

(2) $z = x + 4y$

(3) $z = 256x^2 + y^2$

(1) x, y は正なので、相加・相乗平均の不等式より、

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \cdots \textcircled{1}$$

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$xy = 4$ を代入して、

$$z = x+y \geq 2\sqrt{4}$$

$$\therefore z \geq 4 \cdots \textcircled{2}$$

が成立。

② で等号が成立するのは、① で等号が成立するときで、それは $x = y$ のとき。

$x > 0, y > 0$ および $xy = 4$ と合わせると、 $x = y = 2$ のときに、 $z = 4$ となる。(② の等号が成立する x, y が見つかった。)

以上より、 z の最小値は $\boxed{4}$ である。($x = \boxed{2}, y = \boxed{2}$)

(2) $x > 0, y > 0$ なので、 $x, 4y$ は正であるから、相加・相乗平均の不等式より、

$$\frac{x+4y}{2} \geq \sqrt{x \cdot 4y} \cdots \textcircled{1}$$

$$x+4y \geq 2\sqrt{4xy}$$

$xy = 4$ を代入して、

$$z = x+4y \geq 2\sqrt{16}$$

$$\therefore z \geq 8 \cdots \textcircled{2}$$

が成立。

② で等号が成立するのは、① で等号が成立するときで、それは $x = 4y$ のとき。

$xy = 4$ と合わせると、

$$4y \cdot y = 4$$

$$y^2 = 1$$

$$y = 1 \ (y > 0 \text{ より})$$

このとき、 $xy = 4$ より、 $x = 4$ である。

すなわち、 $x = 4, y = 1$ のときに、 $z = 8$ となる。

(② の等号が成立する x, y が見つかった。)

以上より、 z の最小値は $\boxed{8}$ である。($x = \boxed{4}, y = \boxed{1}$)

(3) $x > 0, y > 0$ より、 $256x^2, y^2$ は正なので、相加・相乗平均の不等式より、

$$\frac{256x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{256x^2 \cdot y^2} \cdots \textcircled{1}$$

$$256x^2 + y^2 \geq 32\sqrt{x^2 y^2}$$

$xy = 4$ を代入して、

$$z = 256x^2 + y^2 \geq 32\sqrt{4^2} = 128$$

$$\therefore z \geq 128 \cdots \textcircled{2}$$

が成立。

② で等号が成立するのは、① で等号が成立するときで、それは $256x^2 = y^2$ のとき、すなわち $16x = y$ のとき。($x > 0, y > 0$ より)

$xy = 4$ と合わせると、

$$x \cdot 16x = 4$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \ (x > 0 \text{ より})$$

このとき、 $xy = 4$ より、 $y = 8$ である。

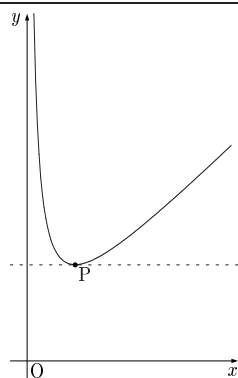
すなわち、 $x = \frac{1}{2}, y = 8$ のとき、 $z = 128$ となる。

(② の等号が成立する x, y が見つかった。)

以上より、

z の最小値は $\boxed{128}$ である。($x = \boxed{\frac{1}{2}}, y = \boxed{8}$)

2. $x > 0$ の範囲において、
 $y = x + \frac{2}{x}$ のグラフは右図のようである。
 点 P の座標を求めよ。



3. x, y は正の実数とする。 $z = \frac{y}{x} + \frac{2x}{y}$ の最小値を求めよ。

x, y は正だから、 $\frac{y}{x}, \frac{2x}{y}$ は共に正であるので、相加・相乗平均の不等式より、

$$\frac{\frac{y}{x} + \frac{2x}{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{2x}{y}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{y}{x} + \frac{2x}{y} \geq 2\sqrt{2}$$

$\therefore z \geq 2\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{2}$ という不等式が必ず成立する。

$\textcircled{2}$ で等号が成立するのは、 $\textcircled{1}$ で等号が成立するときで、それは、 $\frac{y}{x} = \frac{2x}{y} \quad \dots \textcircled{3}$ のとき。

$\textcircled{3}$ より、 $y^2 = 2x^2$ となり、たとえば
 $x = 1, y = \sqrt{2}$ のとき、この等式は成り立つ。

したがって、 $z = 2\sqrt{2}$ となる x, y が存在するので、 x, y が正の実数であるときの $z = \frac{y}{x} + \frac{2x}{y}$ の最小値は、 $\boxed{2\sqrt{2}}$ である。

補足

$t = \frac{y}{x}$ とおくと、 $\frac{2x}{y} = \frac{2}{t}$ であり、 x, y が正であるから、 t も正である。

z を t を用いて表すと、 $z = t + \frac{2}{t}$ となり、問題 2 と同じ設定になっている。

$x > 0$ のとき、 $x, \frac{2}{x}$ は共に正であるから、相加・相乗平均の不等式より、

$$\frac{x + \frac{2}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}$$

したがって、 $y \geq 2\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{2}$ という不等式が必ず成立。

$\textcircled{2}$ で等号が成立するのは、 $\textcircled{1}$ で等号が成立するときで、それは $x = \frac{2}{x}$ のとき。

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} (x > 0 \text{ より})$$

以上より、 $x > 0$ の範囲において、関数 $y = x + \frac{2}{x}$ は、 $x = \sqrt{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとる、とわかった。

よって、 $\boxed{P(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})}$ である。

参考

