中3数学D　復習テスト解答　冬期-1

復習 1-1

(1)
$$
\begin{aligned}
&2x^2+3y^2+4x+12y+10\\
&=2(x^2+2x)+3y^2+12y+10\\
&=2\left\{(x+1)^2-1\right\}+3y^2+12y+10\\
&=2(x+1)^2-2+3y^2+12y+10\\
&=2(x+1)^2+3y^2+12y+8\\
&=2(x+1)^2+3(y^2+4y)+8\\
&=2(x+1)^2+3\left\{(y+2)^2-4\right\}+8\\
&=2(x+1)^2+3(y+2)^2-12+8\\
&=2(x+1)^2+3(y+2)^2-4
\end{aligned}
$$

より常に $z \geqq -4$ であり，

$$\begin{cases} x+1=0 \\ y+2=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

のとき $z=-4$ である．

したがって， z の最小値は $\boxed{-4}$ であり，

そのときの x, y は $\boxed{(x,y)=(-1,-2)}$ ．

(2)
$$
\begin{aligned}
&x^2-2xy+3y^2+2x+2y+6\\
&=x^2-(2y-2)x+3y^2+2y+6\\
&=\left\{x-(y-1)\right\}^2-(y-1)^2+3y^2+2y+6\\
&=\left\{x-(y-1)\right\}^2+2y^2+4y+5\\
&=\left\{x-(y-1)\right\}^2+2(y^2+2y)+5\\
&=\left\{x-(y-1)\right\}^2+2\left\{(y+1)^2-1\right\}+5\\
&=\left\{x-(y-1)\right\}^2+2(y+1)^2-2+5\\
&=\left\{x-(y-1)\right\}^2+2(y+1)^2+3
\end{aligned}
$$

より，常に $z \geqq 3$ であり，

$$\begin{cases} x-(y-1)=0 \\ y+1=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

のとき $z=3$ である．

したがって，z の最小値は $\boxed{3}$ であり，そのときの x, y は $\boxed{(x,y)=(-2,-1)}$ ．

復習 1-2

三角形ABCは直角二等辺三角形である．

(1) $S=\dfrac{1}{2}\cdot \mathrm{AC}\cdot \mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

(2) 三角形ABCを，Pを頂点の一つとする三角形に分割すれば

$$
\begin{aligned}
S&=\triangle \mathrm{PBC}+\triangle \mathrm{PCA}+\triangle \mathrm{PAB}\\
&=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{PI}+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{CA}\cdot \mathrm{PJ}+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{PK}\\
&=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot y+\frac{1}{2}\cdot \sqrt{2}\cdot z\\
&=\frac{x+y+\sqrt{2}z}{2}
\end{aligned}
$$

とも表せるので，

$$\frac{x+y+\sqrt{2}z}{2}=\frac{1}{2} \qquad \therefore x+y+\sqrt{2}z=\boxed{1}$$

(3)　(2)の結果から

$$z=\frac{1-(x+y)}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ☆$$

であるから，$w=x^2+y^2+z^2$ は，x, y のみの関数として

$$\begin{aligned}
w&=x^2+y^2+\left\{\frac{1-(x+y)}{\sqrt{2}}\right\}^2\\
&=x^2+y^2+\frac{(x+y-1)^2}{2}\\
&=x^2+y^2+\frac{x^2+2(y-1)x+(y-1)^2}{2}\\
&=\frac{3}{2}x^2+(y-1)x+y^2+\frac{(y-1)^2}{2}\\
&=\frac{3}{2}\left\{x^2+\frac{2(y-1)}{3}x\right\}+y^2+\frac{(y-1)^2}{2}\\
&=\frac{3}{2}\left\{\left(x+\frac{y-1}{3}\right)^2-\frac{(y-1)^2}{9}\right\}\\
&\qquad\qquad+y^2+\frac{(y-1)^2}{2}\\
&=\frac{3}{2}\left(x+\frac{y-1}{3}\right)^2\\
&\qquad\qquad-\frac{(y-1)^2}{6}+y^2+\frac{(y-1)^2}{2}\\
&=\frac{3}{2}\left(x+\frac{y-1}{3}\right)^2+y^2+\frac{(y-1)^2}{3}\\
&=\frac{3}{2}\left(x+\frac{y-1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}\\
&=\frac{3}{2}\left(x+\frac{y-1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\left(y^2-\frac{1}{2}y\right)+\frac{1}{3}\\
&=\frac{3}{2}\left(x+\frac{y-1}{3}\right)^2\\
&\qquad\qquad+\frac{4}{3}\left\{\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right\}+\frac{1}{3}\\
&=\frac{3}{2}\left(x+\frac{y-1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\\
&=\frac{3}{2}\left(x+\frac{y-1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

と表せる．

この式より，常に $w \geqq \frac{1}{4}$ であり，

$$\begin{cases} x+\dfrac{y-1}{3}=0 \\ y-\dfrac{1}{4}=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

のとき $w=\frac{1}{4}$ である．

したがって w の最小値は $\boxed{\frac{1}{4}}$ であり，そのときの x, y, z は，☆より $z=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ であるから，$\boxed{(x, y, z)=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}$．