中3数学D　復習テスト解答　冬期-3

復習 3-1

(1)　$x>0,\ y>0,\ xy=1$ …… ①

$4x>0,\ 9y>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$$4x+9y \geqq 2\sqrt{4x\cdot 9y}$$

$\therefore z \geqq 2\sqrt{36}=12$

が成り立ち，この不等式の等号は

$$4x=9y$$

のとき成立する．

①の下で $4x=9y$ となるときを考えると，

$y=\dfrac{4}{9}x$ を①に代入して

$$\frac{4}{9}x^2=1 \quad \therefore x=\frac{3}{2}\ (>0)$$

なので，$\boxed{x=\dfrac{3}{2},\ y=\dfrac{2}{3}}$ のときであり，このとき z は最小値 $\boxed{12}$ となる．

(2)

$$z=(x+y)\left(\frac{4}{x}+\frac{9}{y}\right)$$

$$=\frac{4y}{x}+\frac{9x}{y}+13$$

いま，$\dfrac{4y}{x}>0,\ \dfrac{9x}{y}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$$\frac{4y}{x}+\frac{9x}{y} \geqq 2\sqrt{\frac{4y\cdot 9x}{xy}}=12$$

$\therefore z \geqq 12+13=25$

が成り立ち，この不等式の等号は

$$\frac{4y}{x}=\frac{9x}{y}$$

$$4y^2=9x^2 \quad \therefore y=\frac{3}{2}x\ (>0)$$

のとき成立する．

したがって，

$$\boxed{x=2t,\ y=3t\ (t\text{は任意の正の数})}$$

のとき，z は最小値 $\boxed{25}$ となる．

復習 3-2

(1)　直線 PQ の式は $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$ であるから，

これが A(2,1) を通ることより，

$$\frac{2}{p}+\frac{1}{q}=\boxed{1} \quad \cdots\cdots ①$$

(2)　正の数 p,q が①を満たしながら動くとき，

$$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=p+q$$

の最小値を求めたい．

そこで，

$$z=(p+q)\left(\frac{2}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

を考えると，

$$z=\frac{2q}{p}+\frac{p}{q}+3$$

であり，$\dfrac{2q}{p}>0,\ \dfrac{p}{q}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より，

$$\frac{2q}{p}+\frac{p}{q} \geqq 2\sqrt{\frac{2qp}{pq}}=2\sqrt{2}$$

$\therefore z \geqq 2\sqrt{2}+3$

が成り立ち，この不等式の等号は

$$\frac{2q}{p}=\frac{p}{q} \quad \therefore 2q^2=p^2$$

$\therefore p=\sqrt{2}q\ (>0)$

のとき成立する．

①の下で $p=\sqrt{2}q$ となるときを考えると，

$$\frac{2}{\sqrt{2}q}+\frac{1}{q}=1 \quad \therefore \sqrt{2}+1=q$$

なので，$\boxed{p=2+\sqrt{2},\ q=\sqrt{2}+1}$ のときであり，このとき $\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=z$ は最小値 $\boxed{2\sqrt{2}+3}$ となる．