中3数学D　最大最小と不等式　宿題プリント解答　§1　関数の最大・最小

宿題 1-1

(1)
$$
\begin{aligned}
z &= x^2+2y^2+4x+8y+8\\
&= x^2+4x+2(y^2+4y)+8\\
&= (x+2)^2-4+2\{(y+2)^2-4\}+8\\
&= (x+2)^2+2(y+2)^2-4
\end{aligned}
$$
は常に -4 以上であり,
$$\begin{cases} x+2=0\\ y+2=0 \end{cases} \quad \therefore \boxed{\begin{cases} x=-2\\ y=-2 \end{cases}}$$
のとき最小値の $\boxed{-4}$ となる.

(2)
$$
\begin{aligned}
z &= x^2+2xy+2y^2+4x+8y+8\\
&= x^2+(2y+4)x+2y^2+8y+8\\
&= \{x+(y+2)\}^2-(y+2)^2+2y^2+8y+8\\
&= (x+y+2)^2+y^2+4y+4\\
&= (x+y+2)^2+(y+2)^2
\end{aligned}
$$
は常に 0 以上であり,
$$\begin{cases} x+y+2=0\\ y+2=0 \end{cases} \quad \therefore \boxed{\begin{cases} x=0\\ y=-2 \end{cases}}$$
のとき最小値の $\boxed{0}$ となる.

(3)
$$z=(x+y)^2+x^2+y^2$$
は常に 0 以上であり,
$$\begin{cases} x+y=0\\ x=0\\ y=0 \end{cases} \quad \therefore \boxed{\begin{cases} x=0\\ y=0 \end{cases}}$$
のとき最小値の $\boxed{0}$ となる.

※　その必要はないが, 次のようにもできる.
$$
\begin{aligned}
z &= (x+y)^2+x^2+y^2\\
&= 2x^2+2xy+2y^2\\
&= 2\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{2}y^2
\end{aligned}
$$
は常に 0 以上であり,
$$\begin{cases} x=-\dfrac{y}{2}\\ y=0 \end{cases} \quad \therefore \boxed{\begin{cases} x=0\\ y=0 \end{cases}}$$
のとき最小値の $\boxed{0}$ となる.

(4)
$$
\begin{aligned}
z &= (x+y+1)^2+x^2+y^2\\
&= 2x^2+2y^2+2xy+2x+2y+1\\
&= 2\{x^2+(y+1)x\}+2y^2+2y+1\\
&= 2\left\{\left(x+\frac{y+1}{2}\right)^2-\frac{(y+1)^2}{4}\right\}\\
&\qquad\qquad +2y^2+2y+1\\
&= 2\left(x+\frac{y+1}{2}\right)^2-\frac{(y+1)^2}{2}+2y^2+2y+1\\
&= 2\left(x+\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}y^2+y+\frac{1}{2}\\
&= 2\left(x+\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y^2+\frac{2}{3}y\right)+\frac{1}{2}\\
&= 2\left(x+\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left\{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right\}+\frac{1}{2}\\
&= 2\left(x+\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$
は常に $\dfrac{1}{3}$ 以上であり,
$$\begin{cases} x+\dfrac{y+1}{2}=0\\ y+\dfrac{1}{3}=0 \end{cases} \quad \therefore \boxed{\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{1}{3} \end{cases}}$$
のとき最小値の $\boxed{\dfrac{1}{3}}$ となる.

※　(3)と同様に, z が常に 0 以上であることははじめの式から直ちに分かるが,
$$\begin{cases} x+y+1=0\\ x=0\\ y=0 \end{cases}$$
を満たす x, y は存在しないので, $z=0$ とはならず, 最小値は 0 でないことに注意.

宿題 1-2

針金の長さが 1 であることから

$$2x+y=1$$

$$\therefore\ y=-2x+1 \quad \cdots\cdots ①$$

であり， x は $0<x<\dfrac{1}{2}$ の範囲を動く.

(1) 長方形 ABCD の面積

$$S=xy$$

の最大値を求めたい.

①より，

$$\begin{aligned} S &= x(-2x+1) \\ &= -2x^2+x \\ &= -2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8} \end{aligned}$$

であるから，$\boxed{x=\dfrac{1}{4}}$ のとき S は最大値 $\boxed{\dfrac{1}{8}}$ となる．このときの y の値は，①より $\boxed{y=\dfrac{1}{2}}$ である.

(2) 線分 AC の長さ

$$l=\sqrt{x^2+y^2}$$

の最小値を求めたい.

l が最小になるのは， $l^2=x^2+y^2$ が最小になるときであり，①より

$$\begin{aligned} l^2 &= x^2+(-2x+1)^2 \\ &= 5x^2-4x+1 \\ &= 5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5} \end{aligned}$$

であるから，$\boxed{x=\dfrac{2}{5}}$ のとき l^2 は最小値 $\dfrac{1}{5}$ となり， l は最小値 $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$ となる．このときの y の値は，①より $\boxed{y=\dfrac{1}{5}}$ である.

宿題 1-3#

x について平方完成すると，

$$\begin{aligned} z &= x^2+2(my+2)x+2y^2+8y+8 \\ &= \left\{x+(my+2)\right\}^2-(my+2)^2+2y^2+8y+8 \\ &= (x+my+2)^2+(2-m^2)y^2+4(2-m)y+4 \end{aligned}$$

である.

a) $\underline{2-m^2=0 \quad \therefore m=\pm\sqrt{2}\text{ のとき}}$

$$z=(x\pm\sqrt{2}y+2)^2+4(2\mp\sqrt{2})y+4$$

であり，

$$x=\mp\sqrt{2}y-2$$

のとき， z は y の 1 次関数

$$z=4(2\mp\sqrt{2})y+4$$

となるため，最小値をもたない.

b) $\underline{2-m^2\neq 0\text{ のとき}}$

$x=-(my+2)$ のとき， z は y の 2 次関数

$$z=(2-m^2)y^2+4(2-m)y+4$$

であるから，最小値をもつためには

$$2-m^2>0$$

でなければならない.

一方， y についても平方完成することで，

$$z=(x+my+2)^2+(2-m^2)(y-\boxed{\text{A}})^2+\boxed{\text{B}}$$

の形となるから（$\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ には m の式が入る)， $2-m^2>0$ であれば， z は

$$\begin{cases} y=\boxed{\text{A}} \\ x=-(my+2) \end{cases}$$

のとき最小値 $\boxed{\text{B}}$ をもつ.

以上より， z が最小値をもつのは

$$2-m^2>0 \quad \therefore \boxed{-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}}$$

のときである.