中3数学D　最大最小と不等式　宿題プリント解答　§2　不等式の証明

宿題 2-1

(1)　$A=x^2+4xy+5y^2,\ B=2x+4y+1$

に対して，

$A-B$

$=x^2+4xy+5y^2-(2x+4y+1)$

$=x^2+(4y-2)x+5y^2-4y-1$

$=\{x+(2y-1)\}^2-(2y-1)^2+5y^2-4y-1$

$=(x+2y-1)^2+y^2-2$

なので，例えば

$\begin{cases}x+2y-1=0\\ y=0\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$

のときは

$A-B=-2<0\quad\therefore A<B$

であるし，

$\begin{cases}x+2y-1=2\\ y=0\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases}$

のときは

$A-B=2>0\quad\therefore A>B$

である．

よって，$\boxed{\text{(c)}}$．

(2)　$A=x^2+4xy+5y^2,\ B=2x-4y-17$

に対して，

$A-B$

$=x^2+4xy+5y^2-(2x-4y-17)$

$=x^2+(4y-2)x+5y^2+4y+17$

$=\{x+(2y-1)\}^2-(2y-1)^2+5y^2+4y+17$

$=(x+2y-1)^2+y^2+8y+16$

$=(x+2y-1)^2+(y+4)^2$

なので，常に

$A-B\geqq 0\quad\therefore A\geqq B$

が成り立つ．

よって，$\boxed{\text{(a)}}$．

(3)　$A=x^2-4xy+3y^2,\ B=2x-4y-1$

に対して，

$A-B$

$=x^2-4xy+3y^2-(2x-4y-1)$

$=x^2-(4y+2)x+3y^2+4y+1$

$=\{x-(2y+1)\}^2-(2y+1)^2+3y^2+4y+1$

$=(x-2y-1)^2-y^2$

なので，例えば

$\begin{cases}x-2y-1=1\\ y=0\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}$

のときは

$A-B=1>0\quad\therefore A>B$

であるし，

$\begin{cases}x-2y-1=0\\ y=1\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$

のときは

$A-B=-1<0\quad\therefore A<B$

である．

よって，$\boxed{\text{(c)}}$．

宿題 2-2

$x^2+2y^2+5\geqq 2(xy+2x-y)$ ……………… ①

を示したい．

不等式の左辺を A，右辺を B とおくと，

$A-B$

$=x^2+2y^2+5-2(xy+2x-y)$

$=x^2-(2y+4)x+2y^2+2y+5$

$=\{x-(y+2)\}^2-(y+2)^2+2y^2+2y+5$

$=(x-y-2)^2+y^2-2y+1$

$=(x-y-2)^2+(y-1)^2$ ……………… ②

なので，

$A-B\geqq 0\quad\therefore A\geqq B$

が成り立つ．

また，①の等号が成立するのは

$A-B=0$

となるときであり，②よりこれは

$\begin{cases}x-y-2=0\\ y-1=0\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$

のときである．

宿題 2-3#
不等式

$$(a+b)^2 \leqq \boxed{}(a^2+b^2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が常に成り立つとすると，$a=b=1$ のとき

$$4 \leqq \boxed{} \times 2 \quad \therefore 2 \leqq \boxed{}$$

が成り立つから，空欄に当てはまる数は 2 以上である必要がある．

いま，①の空欄に 2 を当てはめると，①は

$$(a+b)^2 \leqq 2(a^2+b^2)$$

となるが，

$$2(a^2+b^2)-(a+b)^2$$
$$=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \geqq 0$$

より，これは常に成立する．したがって，空欄に当てはまる最小の数は $\boxed{2}$ である．

［補足 1］
次のように解くこともできる．

$$z=k(a^2+b^2)-(a+b)^2$$
$$=(k-1)a^2-2ab+(k-1)b^2$$

が，常に $z \geqq 0$ を満たすような，最小の数 k を求めたい．

$$k-1=0 \quad \therefore k=1$$

のときは

$$z=-2ab$$

となり，例えば $a=b=1$ のときなどは $z \geqq 0$ を満たさない．

よって，$k-1 \neq 0$ のときを考えればよい．
このとき，

$$z=(k-1)\left(a^2-\frac{2b}{k-1}a\right)+(k-1)b^2$$
$$=(k-1)\left(a-\frac{b}{k-1}\right)^2-\frac{b^2}{k-1}+(k-1)b^2$$
$$=(k-1)\left(a-\frac{b}{k-1}\right)^2+\frac{k^2-2k}{k-1}b^2 \cdots\cdots ①$$

である．

①が常に 0 以上であるためには，

$$k-1>0 \cdots\cdots ② \quad かつ \quad \frac{k^2-2k}{k-1} \geqq 0 \cdots\cdots ③$$

である必要がある（なぜならば，$b=0$ とすると，①は a の 2 次関数

$$z=(k-1)\left(a-\frac{b}{k-1}\right)^2$$

となっており，これが常に 0 以上になるのは $k-1$ が正のとき．また，$a=\dfrac{b}{k-1}$ とすると，

$$z=\frac{k^2-2k}{k-1}b^2$$

であり，これが常に 0 以上になるのは，

$$\frac{k^2-2k}{k-1} \geqq 0$$

のときであるから）．

一方，②，③の下で，①が常に 0 以上であることはよいので，常に $z \geqq 0$ となるのは，k が②かつ③を満たすときである．

②のとき，③は

$$k^2-2k \geqq 0 \quad \therefore k \leqq 0 \text{ または } k \geqq 2 \cdots\cdots ④$$

であるから，常に $z \geqq 0$ を満たすような k の範囲は②かつ④の $k \geqq 2$ であり，求める最小の k の値は $\boxed{2}$ となる．

$k=2$ のとき，①より

$$z=(a-b)^2 \geqq 0$$

であるから，

$$2(a^2+b^2)-(a+b)^2 \geqq 0$$
$$\therefore (a+b)^2 \leqq 2(a^2+b^2)$$

よって，$(a+b)^2 \leqq \boxed{2}(a^2+b^2)$ が示された．

［補足 2］
おまけの問題については

$$(a+b+c)^2 \leqq \boxed{3}(a^2+b^2+c^2)$$

となる．