中3数学D　最大最小と不等式　宿題プリント解答

§3　相加・相乗平均の不等式と最大・最小

宿題 3-1

$x>0,\ y>0,\ xy=4$ ……………………………… ①

(1)　$x>0,\ y>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$x+y \geqq 2\sqrt{xy}$

$\therefore z \geqq 2\sqrt{4}=4$

が成り立ち，この不等式の等号は

$x=y$

のとき成立する．

①の下で $x=y$ となるときを考えると，$x=y$ を①に代入して

$y^2=4 \quad \therefore y=2\ (>0)$

なので，$\boxed{x=y=2}$ のときであり，このとき z は最小値 $\boxed{4}$ となる．

(2)　$x>0,\ 4y>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$x+4y \geqq 2\sqrt{4xy}$

$\therefore z \geqq 2\sqrt{16}=8$

が成り立ち，この不等式の等号は

$x=4y$

のとき成立する．

①の下で $x=4y$ となるときを考えると，①に $x=4y$ を代入して，

$4y^2=4 \quad \therefore y=1\ (>0)$

なので，$\boxed{x=4,\ y=1}$ のときであり，このとき z は最小値 $\boxed{8}$ となる．

(3)　$z=(x+y)(x+4y)$

$=x^2+5xy+4y^2$

$=x^2+4y^2+20$

ここで，$x^2>0,\ y^2>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$x^2+4y^2 \geqq 2\sqrt{4(xy)^2}$

$\therefore z \geqq 2\sqrt{64}+20=36$

が成り立ち，この不等式の等号は

$x^2=4y^2$

のとき成立する．

①の下で，$x^2=4y^2$ となるときを考えると，$x>0,\ y>0$ なので

$x^2=4y^2 \quad \therefore x=2y$

であるから，これを①に代入して

$2y^2=4 \quad \therefore y=\sqrt{2}\ (>0)$

なので，$\boxed{x=2\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}}$ のときであり，このとき z は最小値 $\boxed{36}$ となる．

※　言うまでもないと思うが，(1), (2)の答の積にはならない．

宿題 3-2

(1) P の y 座標は，$x>0$ の範囲での $f(x)$ の最小値であり，そのときの x の値が P の x 座標である.

$x>0$ のとき，$\dfrac{1}{2x}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より，

$$x+\frac{1}{2x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{2x}} \quad \therefore f(x) \geqq \sqrt{2}$$

が成り立ち，この不等式の等号は

$$x=\frac{1}{2x} \qquad x^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore x=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (>0)$$

のとき成立する.

よって，$f(x)$ の最小値は $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときの $\sqrt{2}$ であり，P の座標は $\boxed{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)}$.

(2) P の y 座標は，$x>-2$ の範囲での $f(x)$ の最小値であり，そのときの x の値が P の x 座標である.

$x>-2$ のとき，$x+2>0$, $\dfrac{3}{x+2}>0$ なので，相加・相乗平均の不等式より

$$x+2+\frac{3}{x+2} \geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{3}{x+2}}$$

$$f(x)+2 \geqq 2\sqrt{3}$$

$$\therefore f(x) \geqq 2\sqrt{3}-2$$

が成り立ち，この不等式の等号は

$$x+2=\frac{3}{x+2}$$

$$(x+2)^2=3$$

$$x+2=\sqrt{3}\ (>0)$$

$$\therefore x=\sqrt{3}-2$$

のとき成立する.

よって，$f(x)$ の最小値は $x=\sqrt{3}-2$ のときの $2\sqrt{3}-2$ であり，P の座標は

$$\boxed{(\sqrt{3}-2,2\sqrt{3}-2)}$$

である.

宿題 3-3#

例えば次のように考えることができる.

x は正の数なので，相加・相乗平均の不等式より，

$$x+\frac{1}{x} \geqq 2 \quad \cdots\cdots ①$$

および

$$x+1+\frac{\boxed{}}{x+1} \geqq 2\sqrt{\boxed{}} \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立ち，①＋② より

$$f(x) \geqq 2+2\sqrt{\boxed{}} \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ.

この不等式の等号が成立するのは，①と②の等号が同時に成立するときである.

①の等号が成立するのは

$$x=\frac{1}{x} \quad \therefore x=1\ (>0)$$

のとき.

一方，②の等号成立条件は

$$x+1=\frac{\boxed{}}{x+1} \qquad (x+1)^2=\boxed{}$$

なので，$\boxed{}>1$ であれば，②は

$$x=\sqrt{\boxed{}}-1\ (>0)$$

で等号成立する.

したがって，

$$1=\sqrt{\boxed{}}-1$$

となるように，$\boxed{}$ に 4 を埋めれば，①, ② の等号は同時に成立し，③も等号成立する.

したがって，空欄に 4 を埋めた

$$f(x)=2x+1+\frac{1}{x}+\frac{\boxed{4}}{x+1}$$

について，

$$f(x) \geqq 2+2\sqrt{\boxed{4}}=6$$

が成り立ち, この不等式は $x=1$ で等号成立するので, $f(x)$ の最小値は $\boxed{x=1}$ のときの $\boxed{6}$ である.