2020　SEG 高校数学科　クラス分け試験

試験コード
60030

受験数学理系クラス分け試験

実施日　：2020 年 3 月 15 日（日）

試験時間：11：20 ～ 13：00（100 分）

配布物：　問題冊子（計算用紙）……………………全 11 頁（表紙を含む）
解答用紙（両面）………………………………1 枚

注意事項

(1) 答案は後日、郵送で返却致します。

(2) 指定された教室で受験してください。

(3) 問題は全部で 5 題あり、問題文は 2 ページから始まります。落丁・乱丁・文意不明の箇所を見いだした場合はすみやかに申し出てください。

(4) $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$の問題は答のみを記入してください。
$\boxed{4}$ $\boxed{5}$の問題は解答の過程をわかりやすい日本語で表現してください。
たとえ答が出ていても、日本語として論旨が読み取れないものは、採点の対象にならない場合があります。

(5) 答案用紙の質問事項は全て記入してください。これからのクラス分けの為に重要となります。

(6) 試験中に私語を発した者、不正行為をした者には退場を命ずることがあります。

(7) 試験終了の合図があったら、ただちに筆記用具を置き、試験監督の指示に従ってください。

会員番号	
氏　名	
学校名	

科学的教育グループSEG®

1 次の問について、**答の数値または式のみを解答欄に記入せよ。**(5 点×5=25 点)

(1) $xyzw=2020$ を満たす正の整数の組 (x,y,z,w) の個数を求めよ。

(2) 2020^{315} を 13 で割った余りを求めよ。

(3) 数字 1,2,3,4,5,6 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚ずつ、計 12 枚ある。この中から異なる 4 枚を無作為に選ぶとき、4 枚のカードに書かれた数字のうち 2 枚のみが一致する確率を求めよ。

(4) $a_n=2^n{}_{2020}\mathrm{C}_n$ $(n=0,1,2,\cdots,2020)$ を最大にする整数 n を全て求めよ。

(5) $\begin{cases} b_1=2 \\ b_{n+1}=b_n+(n+1)(n+2) & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$ で定義される数列 $\{b_n\}$ の第 n 項を求めよ。

この試験では、H、G、F にクラス分けされます。 問題は全部で 5 題です。

[計算用紙]

2 次の問について、**答の数値または式のみを解答欄に記入せよ。**（6 点×5=30 点）

対数は自然対数とし、e は自然対数の底とする。

(1) 極限 $L=\lim_{x\to 0}\dfrac{\{\log(2020+x)\}^2-(\log 2020)^2}{x}$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)=xe^{-x}-kx$ が極値を持つような実数の定数 k の範囲を求めよ。

(3) 定積分 $I=\int_1^e x^2\log x\,dx$ を求めよ。

(4) 定積分 $J=\int_0^1 \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ を求めよ。

(5) 2 曲線 $y=e^{3x}$, $y=5e^{2x}-4e^x$ の囲む部分の面積 S を求めよ。

[計算用紙]

3 次の問について、<u>答の数値または式のみを解答欄に記入せよ。</u>（7 点×5=35 点）

(1) 実数x, yが $0 \leqq y \leqq x \leqq 7$ を満たしながら動くとき、$z = xy - y^2 - 2x + y$の値域Wを求めよ。

(2) θが$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき、$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2 - \sin\theta}$, $y = \dfrac{\cos\theta}{2 - \sin\theta}$で与えられる点$(x, y)$の軌跡$C$の式（点$(x, y)$が$C$上にあるための必要十分条件）を求めよ。

(3) 0 から 10 の整数が書かれたカードが 1 枚ずつ計 11 枚あり、袋の中に入っている。いま、この袋の中からカードを 1 枚取り出し、カードに書かれた数を記録して元に戻す、という操作をn回行う。このとき、記録されたn個の数の合計が 10 の倍数となる確率p_nを求めよ。

(4) 1 から 6 の目が等確率で出るサイコロを振り続ける。このとき、出た目の積がn回目に初めて 10 の倍数となる確率q_nを求めよ。

(5) xyz空間において、xy平面上の領域$0 \leqq y \leqq \cos x$かつ$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$を$D$とする。いま、$0 \leqq k \leqq 1$を満たす定数$k$に対し、$D$のうち$y \geqq k$を満たす部分を直線$y=k$に関して$xy$平面に垂直に折ったものを$D_k$とする。ただし、$D_k$は$z \geqq 0$の側に取るものとする。$k$が$0 \leqq k \leqq 1$の範囲を動くとき、$D_k$が通過して得られる領域$K$の体積$V$を求めよ。

[計算用紙]

4 以下の設問に答えよ。推論過程を明解かつ簡潔な日本語で述べ、計算過程も主要なものは略さず書くこと。(30 点)

注意 **解答欄は答案用紙の裏面にある。**

xy 平面の直線 $y=t^2x-2t$ を l_t とおく。

(1) t が全実数を動くとき、直線 l_t が通過する領域 V を求め、図示せよ。

(2) t が $t>0$ の範囲を動くとき、直線 l_t が通過する領域 W を求め、図示せよ。

[計算用紙]

5 次の4題中、(1)には必ず答えよ。また、(1)以外に(2)(3)(4)から1題を選択して答えよ（選択した問題番号も記入すること）。推論過程を明解かつ簡潔な日本語で述べ、計算過程も主要なものは略さず書くこと。ただし、「結果のみでよい」とある場合は、結果のみを答えよ。

注意 **解答欄は答案用紙の裏面にある。**

必答問題（必ず解答せよ）

(1) a を1より大きい定数とする。実数 x, y が $x^2+y^2 \leqq 5, 2x+y \geqq 0$ を満たしながら動くとき、$z=\dfrac{y}{x+a}$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。**（結果のみでよい）**

（12点）

選択問題（以下から1題を選び、答えよ）

(2) 整数 n に対して、$n(n+1), 2n+1$ が互いに素となることを証明せよ。

（8点）

(3) $a_n=\sqrt{24n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおく。
数列 $\{a_n\}$ には5以上の素数がすべて現れることを証明せよ。

（14点）

(4) 連続した39個の自然数がある。これらを10進法で表したとき、各桁の数字の和が11で割り切れるものが必ず存在することを証明せよ。

（25点）

[計算用紙]